Star-shaped resolution をもつ2次元正規特異点について(複素解析的特異点と可換環)

泊, 昌孝; 渡辺, 敬一

数理解析研究所講究録
595巻 1986年 112-142

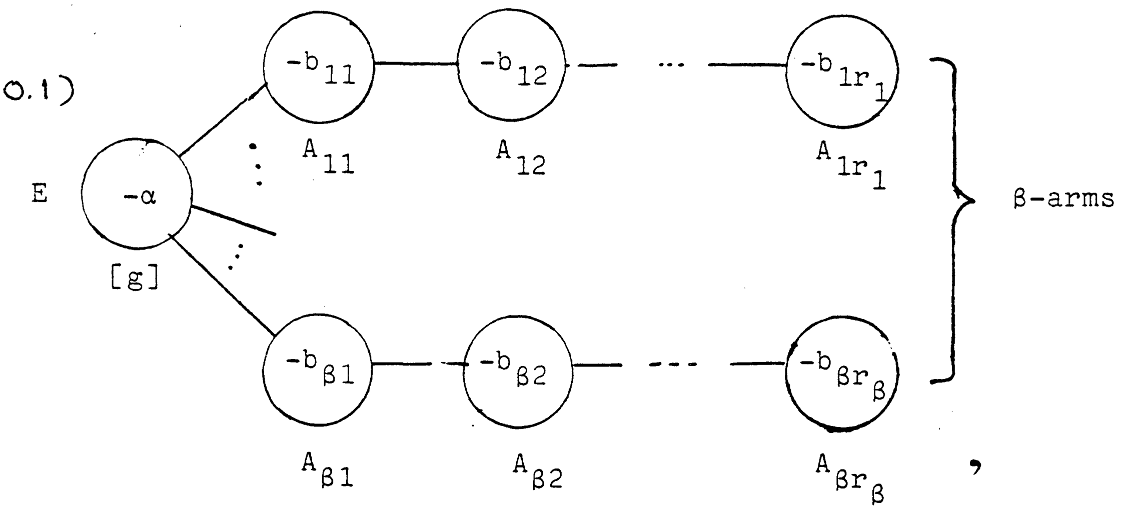
"Star-shaped" resolution をもつ 2次元正規特異点について

京大 数理研　泊 昌孝
(TOMARI MASATAKA)
東海大 理　渡辺敬一
(WATANABE KEI-ICHI)

序

(W, w) が "$\mathbb{C}^*$-action をもつ" 2次元 normal singularity のとき、(W, w) の resolution の dual graph は下記のように、"star-shaped" である。

(0.1)



,

逆に、ある2次元 normal singularity が "star-shaped" dual graph で表される resolution をもったとする。このとき、この "graph" (中心の curve E, 及びその normal bunde の analytic な構造及び, $A_{11}, \cdots, A_{\beta 1}$ と E との交点を指定した

精密な意味でのものを、以下"graph"と云う事にする）に対して、2次元 normal graded ring R が定まる。（Pinkham [12]，[17] 参照）．このRとその特異点 (W, w) は何らかの関係をもつと予想される。また，Rのいろいろな性質は、かなり良くわかっている（例えば，Rがいつ Gorenstein になるか？は [17] でわかっている）。そこで我々は次のような問題を考えてみる．

問題 1.　(W, w) はRの flat deformation として得られるか？　また、得られない時は何が obstruction となっているか？　(W, w) がどの位"良い"特異点であれば、Rの flat deformation になっていると保証できるか？

問題 2.　"star-shaped" resolution をもつ2次元 normal singularity を環論的に特徴づける．

問題 3.　(W, w) が Gorenstein $\Rightarrow$ R が Gorenstein は成立するか？　又，逆はどうか？　(W, w) が Gorenstein かどうかを (W, w) の"graph"だけで判定できるか？

これらの問題を解くために，$\mathcal{O}_{W,w}$ 上の filtration を考える。即ち，$\psi : \tilde{X} \longrightarrow W$ を resolution（star-shaped dual graph をもつ），E を $\psi^{-1}(w)$ の"central curve"とするとき，

$F^k(\mathcal{O}_{W,w}) = \{ f \in \mathcal{O}_{W,w} \mid \psi^*(f) \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE) \} = \psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE))_w$

と定義するとき．

定理 1．$G = G(\mathcal{O}_{W,w}) = \bigoplus_{k\geq 0} F^k(\mathcal{O}_{W,w})/F^{k+1}(\mathcal{O}_{W,w})$ は自然に R の subring と思えて，R/G は finite length となる。特に，G の normalization が R であり，$\dim_{\mathbb{C}} R/G = p_g(R) - p_g(\mathcal{O}_{W,w})$ となる。ただし，$p_g(\mathcal{O}_{W,w}) = \dim R^1\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})_w$ [16] とする。

特に，$\mathcal{O}_{W,w}$ は deformation（(1.2) 参）と normalization を通じて R と結ばれる。そして，$\mathcal{O}_{W,w}$ が R の p_g－constant flat deformation で得られる事は，$p_g(\mathcal{O}_{W,w}) = p_g(R)$ となる事と同値である。

例えば，$a(R) \leq 1$ となる R（又は "graph" Γ）については，常に $p_g(R) = p_g(\mathcal{O}_{W,w})$ が成立する事がわかる (1.13)．（$a(R)$ は [6],[17] 参照）。

定理 2．　ある 2 次元 normal singularity $\mathcal{O}$ / $k = \bar{k}$, $ch(k) = 0$ が "Star-shaped resolution" をもつためには，$\mathcal{O}$ 上に filtration $\{F^k\}_{k\geq 0}$ で，$G(\mathcal{O}) = \bigoplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ が isolated singularity をもつ 2 次元 graded domain となるものが存在する事が必要十分である。また，$\mathcal{O}$ が "Star-shaped resolution" をもち，cyclic quotient singularity でないとき，この filtration $\{F^k\}$ は上記のものと一致する。

問3について，

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \psi^{-1}(w)) \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\psi"'] & (X, E) \arrow[d, "\phi"] \\
& (W, w)
\end{tikzcd}$$

τ: β本の枝のcontraction (cf (1.1))

$E = \phi^{-1}(w)$ の reduced structure を入れたもの.

我々は，次を得た（定理(2.3)）．

定理 3. 次の条件は同値である。

(1) $\mathcal{O}_{W,w}$ は Gorenstein

(2) R が Gorenstein，かつ，$a = a(R)$ と置くとき，

$H^1(X, \mathcal{O}_X(-aE)) = R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \longrightarrow H^1(X-E, \mathcal{O}_X(-aE)) \cong H^2_m(\mathcal{O}_{W,w})$

（$X - E \hookrightarrow X$ より生ずる canonical homomorphism）は単射である。

そして，実際，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \longrightarrow H^2_m(\mathcal{O}_{W,w})$ の単射性は本質的である。すなわち，R が Gorenstein であって，$\mathcal{O}_{W,w}$ が Gorenstein でない例が存在する（例(1.15)(iii)，例(2.2) 定理(3.9) 参照）。§2，§3 では，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \longrightarrow H^2_m(\mathcal{O}_W)$ の単射性が研究対象となる（定理(1.12)参照）。

（問(2.5)）

$\mathcal{O}_{W,w}$ が Gorenstein なら，$G = R$ が成立するか？という問に対してはまだ反例が見つかっていない。$a(R) \leqq 2$ のとき（命題(2.4)），及び $p_a(\mathcal{O}_{W,w}) = 1$ で $\mathcal{O}_{W,w}$ が Gorenstein $/k = \bar{k}$, $ch(k)$

$=0$ のときは $G=R$ となる（定理(3.2)）。

以下に於て上記の結果の略証を与えたい．完全な証明は、目下論文を作製中なので、そちらに委ねたい．

§1. Notation, Giraud の inverse image, fundamental exact sequence.

Notation を以下のように定める．

(1.1) k : 標数 0 の代数閉体

(A, m) : k 上 essentially of finite type の 2 次元 normal local domain

(W, w) : $W = \mathrm{Spec}(A)$, $w = \{m\} \in W$.

$\psi : \tilde{X} \to W$: (W, w) の resolution, exceptional set $\psi^{-1}(w)$ の dual graph は 1 ページ目の図の通りとする．

$\tau : \tilde{X} \to X$; $\psi^{-1}(w)$ の枝の部分（即ち, $A_{11}, \dots, A_{1r_1}, \dots, A_{\beta r_\beta}$）を contract したもの．$X$ は normal 2次元 scheme で β 個の cyclic quotient singularity をもつ．X は高々 rational singularity しかもたないので，$\phi : X \to W$ は projective である．([2])

簡単のため，$\tau(E)$ も同じ E で表わす．

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \psi^{-1}(w)) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\psi"'] & & (X, E) \arrow[dl, "\phi"] \\
& (W, w) &
\end{tikzcd}$$

$$F^k = F^k(A) = \{ f \in A \mid \mathrm{div}_{\tilde{X}}(\psi^*(f)) \geqq kE \} = \psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE))$$
$$= \phi_*(\mathcal{O}_X(-kE)).$$

$$G = G(A) = \bigoplus_{k \geqq 0} F^k / F^{k+1},$$

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geqq 0} F^k(A) \cdot T^k \hookrightarrow A[T].$$

Xは高々 rational singularity しかもたないから，適当な正整数 N をとると，$-NE$ は X の ample Cartier divisor になる．従って，$X = \mathrm{Proj}(\mathcal{R})$ と思える．（$\mathcal{R}$は A 上有限生成で，Gが integral domain だから，$\mathcal{R}$は normal である。）

$$\mathcal{O}_X(k) = \widetilde{\mathcal{R}(k)} = \mathcal{O}_X(-kE)$$

$$\mathrm{Proj}(G) \cong E, \quad \mathcal{O}_E(k) = \widetilde{G}(k)$$

(1.2)

$$\mathcal{R}' = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F^k(A) \cdot T^k = \mathcal{R}[T^{-1}] \quad (k<0 \text{ のとき } F^k(A) = A),$$

$u = T^{-1}$ とおくと，$G = \mathcal{R}'/u\mathcal{R}'$．$c \neq 0 \in k$ に対し，$\mathcal{R}'/(u-c)\mathcal{R}' \cong A$ だから，A は Gの flat deformation である．問題は G を記述する事である。 graded rings の一般論により（E.G.A.[7] III, §2），$M = G_+ = \bigoplus_{k>0} G_k$ とおくとき，

$$0 \to G \to \bigoplus_{k \geqq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(k)) \to H^1_M(G) \to 0 \quad (\text{exact}),$$

$$H^2_M(G) \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^1(E, \mathcal{O}_E(k)).$$

がえる。（ここで，morphism はすべて grading を保っている。）

(1.3)　E の上の divisor D を次のように定める.

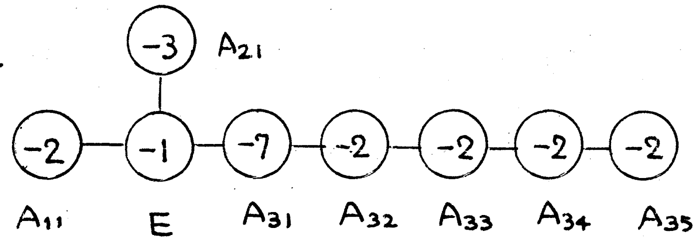
$$D = Q - \sum_{i=1}^{\beta} x_i P_i \quad \in \mathrm{Div}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

但し, $P_i = E \cap A_{i1}$,　$x_i \in \mathbb{Q}$ で,

$$x_i^{-1} = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ix_i}] = b_{i1} - \cfrac{1}{b_{i2} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_{ix_i}}}}$$

(以下, $[b_1, \dots, b_s] = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_s}}}$ で連分数をあらわす事にする。)

(1.4) 例



のとき.

$$D = Q - \frac{1}{2} P_1 - \frac{1}{3} P_2 - \frac{5}{31} P_3$$

(1.5) "graph" Γ に対して決まる E 上の divisor を $D = D(\Gamma)$ とするとき,

$$R(\Gamma) = R(E, D) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(kD)).T^k \hookrightarrow k(E)[T].$$

但し, $H^0(E, \mathcal{O}_E(kD)) = \{ f \in k(E) \mid \mathrm{div}_E(f) + kD \geqq 0 \}$.

ここで,

$$[kD] = \sup\{ M \in \mathrm{Div}(E) \mid M \leqq kD \}$$

$$\{kD\} = \inf\{ M \in \mathrm{Div}(E) \mid M \geqq kD \}$$

とおくと, $H^0(E, \mathcal{O}_E(kD)) = H^0(E, \mathcal{O}_E([kD]))$,

$\{kD\} = -[-kD]$ である.

(1.6) $\tau: \tilde{X} \longrightarrow X$ に注目する。τの exceptional set は $B = \bigcup_{i,j} A_{ij}$ (我々は常に(0.1)のグラフを考えているものとする。)

$$\mathrm{Div}(\tau) = \bigoplus_{A_{ij} \subset B} \mathbb{Z} \cdot A_{ij} \quad , \quad \mathrm{Div}(\tau, \mathbb{Q}) = \mathrm{Div}(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

とおく. $L, M \in \mathrm{Div}(\tilde{X})$ 又は $\mathrm{Div}(\tau, \mathbb{Q})$ に対して,

$$L \gg 0 \iff {}^\forall i,j, \quad A_{ij} \cdot L \leqq 0.$$

$$L \gg M \iff L - M \gg 0$$

$$e_\tau(L) \in \mathrm{Div}(\tau, \mathbb{Q}) \quad , \quad L \cdot A_{ij} = e_\tau(L) \cdot A_{ij} \quad ({}^\forall A_{ij} \subset B).$$

(Bの交叉行列は負定値だから, かかる $e_\tau(L)$ は一意的に定まる。 また, $L \in \mathrm{Div}(\tau, \mathbb{Q})$ のとき, $L \gg 0 \Rightarrow L \geqq 0$.)

$F \in \mathrm{Div}(\tau, \mathbb{Q})$ に対して,

$$[F]_G = \inf \{ H \in \mathrm{Div}(\tau) \mid H \gg F \} \quad \text{とおく.}$$

(Gは Giraud の頭文字のつもりである。)

$R^1\tau_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ なので, 次が成立する。

<u>Proposition</u> (1.7) (Giraud の inverse image, [5], §1)

$M \in \mathrm{Div}(X)$ に対して, 次の条件(*)をみたす組 $(\mathcal{L}, u)$ が一意的に存在する。但し, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\tilde{X})$, $u: \tau_*(\mathcal{L})|_{X-\tau(B)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(M)|_{X-\tau(B)}$.

(*) $[e_\tau(L)]_G = 0 \quad (\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L), L \in \mathrm{Div}(\tilde{X}))$.

このとき, $L = M_1 - [e_\tau(M_1)]_G$ (M_1はMの strict transform) であり,

(i) $\tau_*(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_X(M)$, $\quad R^1\tau_*(\mathcal{L}) = 0$

(ii) $\mathcal{L} \cong \tau^*(\mathcal{O}_X(M))/(\text{torsion})$

が成立する。 この $\mathcal{L}$（又は L）を M の "Giraud の逆像" と呼ぶ.

(1.8) Mumford, 酒井は（[13] 参照）$M_1 - e_\tau(M_1)$ を M の逆像としている。$Z = [M_1 - e_\tau(M_1)] = M_1 - \{e_\tau(M_1)\}$ とおくと, $L \leqq Z$ であり, Z から L への "computation sequence" $\{Z^{(i)}\}_{i=0}^{s}$ を使って L を求める事ができる。即ち, $Z^{(0)} = Z$, $Z \cdot A < 0$ なる irred. curve $A \subset B$ が存在するとき, $Z^{(1)} = Z - A$, $\cdots$, $Z^{(i-1)} \cdot A^{(i-1)} < 0$ のとき $Z^{(i)} = Z^{(i-1)} - A^{(i-1)}$, $\cdots$ この操作が $Z^{(s)}$ でとまるとき, $L = Z^{(s)}$ である。

<u>Lemma</u> (1.9). 上の記号を使う事にする。各 $i = 1, \cdots, \beta$ に対し, Z と L の A_{i1}, A_{ir_i} の係数は一致する。

この証明は省略するが、かなり面倒である。これより、次が云える.

<u>Cor</u>. (1.10). L_{-k} を $-kE \in \mathrm{Div}(X)$ の Giraud の逆像とするとき, L_{-k} の A_{i1} の係数は

$$-\left\{\frac{k}{[b_{i1}, \cdots, b_{ir_i}]}\right\} \quad \text{で与えられる } (i = 1, \cdots, \beta).$$

(証明) $$e_\tau(E) = -\sum_{i=1}^{\beta}\left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{1}{\prod_{k=1}^{j} [b_{ik}, b_{ik+1}, \cdots, b_{ir_i}]} \cdot A_{ij}\right)$$

であり, (1.9) より, L_{-k} の A_{i1} の係数は $-kE - \{e_\tau(-kE)\}$

の係数と一致する．

<u>Lemma.</u> (1.11). Γ を (0.1) で与えられる "graph", $D = D(\Gamma) \in \mathrm{Div}(E, \mathbb{Q})$ とするとき，(1.1) の記号の下に，

$$\mathcal{O}_X(-kE)/\mathcal{O}_X(-(k+1)E) \cong \mathcal{O}_E([kD]).$$

(証明) D の定義と (1.10) より，$\mathcal{O}_E([kD]) \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k}) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} \mathcal{O}_E$ である。exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k} - E) \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k}) \longrightarrow \mathcal{O}_E([kD]) \to 0$$

の τ での direct image をとる。$\tau_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k})) \cong \mathcal{O}_X(-kE)$ は (1.7) で注意した．$L_{-k} - E \geqq L_{-k-1}$ で，$\tau_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k} - E))$ は reflexive だから，$\tau_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k} - E)) = \mathcal{O}_X(-(k+1)E)$ となる。従って，$R^1\tau_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k} - E)) = 0$ を示せば

$$0 \to \mathcal{O}_X(-(k+1)E) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-kE) \longrightarrow \mathcal{O}_E([kD]) \to 0$$

が得られる。 $Z_0 = \sum_{i,j} A_{ij}$ を τ の excep. set の fundamental cycle，$W_k = (L_{-k} - E) - L_{-k-1}$ とすると，$W_k \leqq Z_0$，$\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k} - E)$ と W_k の各 irred. comp. の交わり $\geqq -1$ が示せ，$R^1\tau_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k-1})) = 0$ と合わせて，$R^1\tau_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-k} - E)) = 0$ を得る．

<u>定理</u>. (1.12). (1.1), (1.5) の仮定の下に，graded modules の exact sequence

$$0 \longrightarrow G(A) \longrightarrow R = R(E, D) \longrightarrow U \longrightarrow 0 \qquad (1.12.1)$$

が canonical に作れ，ここで，$\dim_k U = p_g(R) - p_g(A)$ であ

り，更に，次の条件は同値

(1) $G(A)$ は normal （即ち，$U=0$）.

(2) $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \to R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-kE))$ がすべての $k\in\mathbb{Z}$ に対して injective

(2′) $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \to H^1(X-E, \mathcal{O}_X(-kE)) \cong H^2_m(A)$ がすべての $k\in\mathbb{Z}$ に対して injective.

系 (1.13). $a(R(E,D)) \leqq 1$，即ち，$H^1(E, \mathcal{O}_E(kD))=0$ $(k\geqq 2)$ のとき，$G(A)\cong R$ である．従って更に，R が Gorenstein (resp. complete intersection, hypersurface) のとき A もそうなる。

（証明） $0\to \mathcal{O}_X(-(k+1)E) \to \mathcal{O}_X(-kE) \to \mathcal{O}_E(kD) \to 0$ の ϕ_* をとると，

$$U = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ker}\left[R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \to R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-kE))\right]$$

とおいて，(1.12.1) を得る．$-NE$ が ample Cartier divisor となる $N>0$ が存在するので，$k\gg 0$ で $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-kE))=0$.
ゆえに，$p_g(A) := \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \dim R^1\phi_*(\mathcal{O}_X) \leqq \sum_{k\geqq 0}' \dim H^1(\mathcal{O}_E(kD))$，等号成立 $\Leftrightarrow$ $U=0$ は容易にわかる。また，$k=0$ のとき，$H^0(\mathcal{O}_X) \to H^0(\mathcal{O}_E)\cong k$ は常に surjective だから，

$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-E)) \longrightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X)$

は常に injective. $a(R)\leqq 1$ のとき，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-kE))=0$ $(k\geqq 2)$

だから，$U=0$ となる．

注(1.14)．$\varepsilon=\min\{k>0 \mid R_k \neq 0\}$ とおくとき，$\varepsilon \geqq a(R)$ ならば $U=0$ となるのも，同様の議論よりあきらかであろう．

さて，次に序で述べた定理2を証明しよう．A が "star-shaped" resolution をもつとき，(1.12) により，G の素 ideal $\mathfrak{p} \neq M=G_+$ をとると，$G_{\mathfrak{p}}=R_{\mathfrak{p}}$，R は normal だから $G_{\mathfrak{p}}$ は regular，従って G は isolated singularity をもつ．

逆に，G が isolated singularity をもつとき，Proj(G) は1次元 normal より regular である。$f \in F^m(A)$, $f \notin F^{m+1}(A)$ をとると，[4], (2.6) の方法により，$E \cap D_+(fT^m)$ 上の点に於て，$X=\mathrm{Proj}(\mathcal{R}) \supset D_+(fT^m)$ は、$[\mathcal{R}_{(fT^m)}]_0 \cong [\mathcal{R}/(fT^m-1)]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ から，regular scheme $\mathrm{Spec}(\mathcal{R}/(fT^m-1))$ の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-action による quotient であり，かつこの $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-action は E を保つから，局所的に，$P \in E \cap D_+(f)$ に於て，$\hat{\mathcal{O}}_{X,P} \cong k[[u,v]]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$，$\zeta \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の作用は，(ζ を1の m 乗根として) $(u,v) \longrightarrow (\zeta u, \zeta^q v)$ の形で得られる．ここで，E は P に於て，$u=0$ で定義されるから，Spec(A) の resolution (X の resolution) は "star-shaped" である。後半も "central curve" が一意的な場合は $\overbrace{\text{G(A) が isol. sing. となる}}$ filtration も ($\forall m \gg 0$, $G_m \neq 0$ とすれば) 一意的である，

例.(1.15).(i)　$\Gamma = [\ \underset{[1]}{\overset{E}{(-1)}} - \underset{A.}{(-2)}\ ]$,　$D(\Gamma) = P - \frac{1}{2}Q$,

E は elliptic curve とする。このとき、$a(R) \leq 1$ より、

$P = Q$ なら、　A は Gorenstein,　$p_g(A) = 2$,

$P \neq Q$ なら、　$p_g(A) = 1$　(§2の結果より、A は non-Gorenstein)

(ii)　$\Gamma = [\ \underset{[1]}{\overset{E}{(-1)}} - \overset{A_1}{(-2)} - \overset{A_2}{(-2)}\ ]$,　$D(\Gamma) = P - \frac{2}{3}Q$,　E は elliptic curve とする。　このとき、

(a) $P = Q$　なら、R は Gorenstein,　$a(R) = 2$,　$p_g(R) = 3$.

(b) $P \neq Q$,　$2P \sim 2Q$ なら、R は Gorenstein,　$a(R) = 2$,　$p_g(R) = 2$.

(c) $2P \not\sim 2Q$　のとき　$a(R) = 1$,　$p_g(R) = 1$

(c) のときは　$U = 0$ だが、(a),(b)　のとき A が常に Gorenstein かどうか、わからない。ただ、もし A が Gorenstein なら、$p_a(\Gamma) = 1$　なので、$U = 0$ となる。((3.2) 参照)。

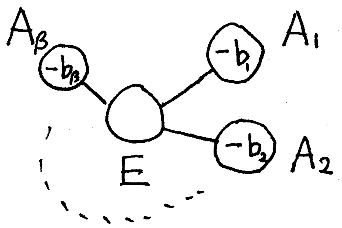
(iii)　"graph" Γ の fundamental cycle を Z とする。[9], (4.1) により、もし $\chi(Z) = 0$ なら、"generically" に、$p_g(\mathcal{O}) = 1$ である。Γ を(1.4)のグラフ、$E \cong \mathbb{P}^1$,　$D = D(\Gamma)$,　$R = R(E, D)$ とすると、　$R \cong k[x, y, z]/(x^{31} + y^3 + z^2)$ より、$a(R) = 25$,　$p_g(R) = 5$.　ゆえに、"generically" に、$\dim U = 4$　という事になる。((3.9)参照)。

更に、例(2.1), 例(2.2), 定理(3.2), 定理(3.9) も参照.

§2. Gorenstein 性について.

この節でも, A は常に (0.1) の "graph" を resolution としてもつ 2次元 normal local ring とする。簡単のため,
$D = D(\Gamma) \in \mathrm{Div}(E, \mathbb{Q})$, $R = R(E, D)$ とおく。

まず, §1 の応用として, "graph" だけで A の Gorenstein 性が判定が可能なものをあげて見よう. ((1.15) も参照)

例 (2.1) $\Gamma =$ 

E の normal bundle が $-(K_E + P_1 + \cdots + P_\beta)$

で与えられるとき (但し, $p_a(E) = 1$ のとき $\beta > 0$, また $p_a(E) = 0$ のときは $\beta - 2 > \sum_{i=1}^{\beta} \frac{1}{b_i}$ を仮定する), [17] (2.9) より R は Gorenstein, $a(R) = 1$ なので, (1.13) により $G = R$. 従って A も Gorenstein となる。

ところが, $a(R) \geqq 2$ の場合には, 一般には, 次のように "graph" だけからは A の Gorenstein 性が判定できない事が起る。

例 (2.2) (日高文夫氏との議論による. [8], [20] 参).

$\Gamma = \underset{[2]}{(-1)}\ E$, $a(R) = 2$. E: non-singular alg. curve of genus 2. そして, E の normal bundle は $[-P]$, $P \in E$ は a hyper-elliptic Weierstrass point となっているものとする.

この "graph" を用つ特異点には，次の2つの場合がある。

Case (i) $\sqcup = 0 \Rightarrow p_g = 4$ で multiplicity $=2$ の超曲面となる（特に Gorenstein）。 $R = R(E, D)$ がその例。

Case (ii) $\sqcup \neq 0 \Rightarrow p_g = 3$ で multiplicity $=4$. emb. dim $=5$. Cohen-Macaulay type $=3$（特に non-Gorenstein）となる。例は，negative line bundle $[-p] \longrightarrow E$ の zero section の近傍を，$H^1(E, \mathcal{O}_E(2p))$ ($\cong \mathbb{C}$) の non-zero 元によって変形し，blowing-down をして得られる。詳しくは [20] などを参照して下さい。（(3.11)参）.

いずれにしても，R の Gorenstein 性の判定は [17] (2.9) で簡単にできるので，"A が Gorenstein" と "R が Gorenstein" の関係が明確になる事が望まれる。次が成立する。

<u>定理</u> (2.3). 次の条件は同値である。

(1) A は Gorenstein

(2) R が Gorenstein，かつ $a = a(R)$ とおくとき，

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-aE)) = R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \to H^1(X-E, \mathcal{O}_X(-aE)) \cong H^2_m(A)$$

（$X-E \hookrightarrow X$ より生ずる canonical homomorphism）は単射である。（$H^1(E, \mathcal{O}_E(a)) \neq 0$ より，$H^1(X, \mathcal{O}_X(-aE)) = H^1(X, \mathcal{O}_X(a)) \neq 0$）.

（証明） (1) ⇒ (2) A が Gorenstein のとき，$\mathcal{O}_X$ の canonical module は [18], §2., Proposition により，$\mathcal{O}_X(m) = \mathcal{O}_X(-mE)$

と書け，$K_R \cong R(m-1)$ より，R は Gorenstein，$m = a+1$ である．また，A が Gorenstein，$a(R) = a$ とおくとき，

$\phi : X \longrightarrow W$ に関する duality theorem，

$$R\mathrm{Hom}_W(R\phi_*(\mathcal{F}), \omega_W^{\cdot}) \cong R\phi_*(R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega_X^{\cdot}))$$

で，$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$ とすると，$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(a+1)$，$\omega_W = \mathcal{O}_W$ より，

$R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X(n), \omega_X) \cong \mathcal{O}_X(a+1-n)$ から，spectral sequence

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_A^p(R^{-q}\phi_*(\mathcal{O}_X(n)), A) \Longrightarrow R^{p+q}\phi_*(\mathcal{O}_X(a+1-n))$$

を得，これより，exact sequence

$$0 \to F^{a+1-n}(A) \longrightarrow A \longrightarrow [R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(n))]' \to R^1\phi_*\mathcal{O}_X(a+1-n) \to (A/F^n(A))' \to 0$$

を得る．（ここで，$(\ )' = \mathrm{Hom}_A(\ , I)$，$I$ は $A/\mathfrak{m}$ の injective envelope）．$0 \leq n \leq a+1$ とし，$n = 0, a+1$ の時のものと並べて書き，$R^1\phi_*\omega_X = 0$（Grauert-Riemenschneider V. Th. より出る）に注意すると，

(2.3.1). $\mathrm{Ker}(R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(n)) \to R^1\phi_*\mathcal{O}_X)$ と $\mathrm{Ker}(R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(a+1-n)) \to R^1\phi_*(\mathcal{O}_X))$ は互いに dual である。

を得る．(1.13) で見たように，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(1)) \to R^1\phi_*(\mathcal{O}_X)$ は常に injection だから，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(a)) \to R^1\phi_*(\mathcal{O}_X)$ も injection.
$H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong [R^1\phi_*(\omega_X)]' = 0$ より，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X) \to H^1(X-E, \mathcal{O}_X) \cong H_{\mathfrak{m}}^2(A)$ は injective．ゆえに，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \to H_{\mathfrak{m}}^2(A)$ は単射である。

(2) ⇒ (1)　$\Psi : \tilde{C} \to \mathrm{Spec}(R)$ を R の resolution とする。

$\tilde{X}$ と $\tilde{C}$ の exceptional divisor は見かけ上全く同じなので, (1.10) の $-kE$ の Giraud の inverse image を $\tilde{X}$ 上のものも $\tilde{C}$ 上のものも共に L_{-k} と表わす. R は Gorenstein と仮定したから, $K_{\tilde{C}}$ は exceptional divisor で書けるが, $K_{\tilde{C}} = L_{-a-1}$ である事が容易にわかる。(各 A_{ij}, E との numerical な data で $K_{\tilde{C}}$ は決まるから.) 従って, $\tilde{X}$ 上の L_{-a-1} も $K_{\tilde{X}}$ と numerical に同値である。本当に, $K_{\tilde{X}} = L_{-a-1}$ が示せれば, A は Gorenstein となる。 $\tilde{B} = E \cup \bigcup_{i,j} A_{ij} \subset \tilde{X}$ とおくと, $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a})) \cong R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(a))$ より, 次の exact sequence ができる.

$$0 \to H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a})) \to H^2_m(A) \cong H^1(\tilde{X}-\tilde{B}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a}))$$
$$\to H^2_{\tilde{B}}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a})).$$

この exact sequence の dual ($\mathrm{Hom}_A(\ ,I)$) をとると,

$$0 \leftarrow [H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a}))]' \leftarrow \hat{K}_A \leftarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} - L_{-a})) \leftarrow 0$$

を得る. ([10], (2d: Appendix) 参照). $\tilde{X}$ 上の meromorphic 2-form β で, $\tilde{X} - \tilde{B}$ 上 holomorphic で, $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} - L_{-a}) = \Omega^2_{\tilde{X}}(-L_{-a})$ の image に入らないものをとると,

$$\mathrm{div}(\beta) = B_1(\beta) + B_2(\beta),$$

$\mathrm{Supp}(B_1(\beta)) \subset \tilde{B}$, $B_2(\beta) \geqq 0$, $\mathrm{Supp}(B_2(\beta))$ は $\tilde{B}$ の外とする. 仮定により, $B_1(\beta) \ngeq L_{-a}$ である. $\mathrm{div}(\beta)$ と L_{-a-1} は $\tilde{B}$ 上 numerically equivalent だから, $L_{-a-1} - B_1(\beta)$ の E, A_{ij} との交わり $\geqq 0$. ゆえに, $B_1(\beta) - L_{-a-1} \geqq 0$. もし $B_1(\beta) > L_{-a-1}$

とすると，$B_1(\beta) \geqq L_{-a-1} + Z_0$ （Z_0 は $\widetilde{B}$ の fundamental cycle）.
(2.3.2).
$L_{-a} \geqq L_{-a-1} \geqq L_{-a} + L_{-1}$ かつ $Z_0 \geqq -L_{-1}$ が成立するので

$B_1(\beta) \geqq L_{-a-1} + Z_0 \geqq L_{-a-1} - L_{-1} \geqq L_{-a}$ これは仮定に矛盾する。ゆえに $B_1(\beta) = L_{-a-1}$，$\mathrm{div}(\beta)$ と L_{-a-1} は numerically equivalent だから，$B_2(\beta) = 0$，$\mathrm{div}(\beta) = L_{-a-1}$ ゆえに，$K_{\widetilde{X}} = L_{-a-1}$，A は Gorenstein である．（(2.1) の証明終）.

（注）((2.3.2) について）前半の不等号は，$M, N \in \mathrm{Div}(\tau, \mathbb{Q})$ に対して，一般に，$[M]_G + [N]_G \geqq [M+N]_G$ だが，これより得られる．また，$L_{-1} = -E - [e_\tau(-E)]_G$，$Z_0 \geqq 0$ より，$Z_0 - E \geqq [e_\tau(-E)]_G$，即ち，$Z_0 \geqq -L_1$.

"A が Gorenstein" のとき (1.13) の仮定を弱められる。即ち，

<u>命題</u> (2.4). A が Gorenstein $a(R) \leqq 2\varepsilon(R)$ のとき，$G(A) = R$ である。但し，$\varepsilon(R) = \min\{n > 0 \mid R_n \neq 0\}$.

証明は，duality (2.3.1) に注意すれば，(1.13) と同じである。

また，定理 (2.3) 及び命題 (2.4) は，例 (2.2) の graph について，Gorensteinになる特異点が Case(i) の場合に属する事を（Case (ii) の不変量の解析 [20] [8] をしないで）示している。

さて、次に命題(2.4)で扱えない場合について論じなければならない。つまり、"Aが Gorenstein であって ⊔ が non-zero" となる場合の考察をするべきだが、残念ながら、筆者達はそのような例を見出せなかった。そこで、

<u>問題</u>(2.5)　我々の状況で、A が Gorensteinならば、⊔ = 0 となるか？

を問う。定理1により、これは

<u>問題</u>(2.5)′　"Star-shaped" resolution をもつ Gorenstein singularity は、常に k^*-action をもつものの p_g-constant flat deformation で得られるか？

という、少し虫の良い問と同値である（「同じ "graph" を持つ Gorenstein singularity が、geometric genus p_g の意味で unique であって、かつ、皆 flat defomation でつながるか？」というのは、強すぎるような気もするが……）。また、環論的には、定理2を通じて、

<u>問題</u>(2.5)″　(A, m) を2次元 (normal) Gorenstein local algebra $/k$ であり、$\{F^k\}_{k\geq 0}$ を A の filtration であって $\bigoplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ が isolated singularity のみを持つ integral domain であるとする。この時、$\bigoplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ は normal (i.e., Cohen-Macaulay, 特にこの場合 Gorenstein) になるか？

とも述べられる。

以下，上の問に対するひとつのアプローチ（定理(3.2)）を，「Rの構造が良くわかっている場合」の我々の議論の応用例として紹介する。

§3. "Star-shaped" resolutionを持つ（Wagreichの意味での）楕円型特異点について

この節でも，Aは常に(0,1)の"graph"をresolutionとしてもつ2次元normal local ringとし，§1, §2と同様の記号を用いる。

A（またはΓ）の"arithmetic genus" p_aは

$$p_a(\Gamma) = \sup_Y p_a(Y) = \sup_Y \{1 - \chi(\mathcal{O}_Y)\}$$

で定義される[16]。ここでYはAのresolutionのexceptional setをsupportとする（又はΓの）non-zero effective divisor全体を動くものとする。この時，(k^*-actionを持つ特異点) $R = R(E, D)$について次が成立する[15] §3。

(3.1) $$\sum_{\ell=\alpha\varepsilon}^{(\alpha+1)\varepsilon-1} h^1(\mathcal{O}_E(\ell D)) \leqq p_a(\Gamma),$$ ただし

αはzero以上の整数を動き，$\varepsilon = \varepsilon(R) = \min\{\beta > 0 \mid R_\beta \neq 0\}$。

この制約を用いて，次を示そう。

<u>定理</u> (3.2)　Aが Gorensteinかつ $p_a(\Gamma) = 1$ / $k = \bar{k}$, $ch(k) = 0$のとき $G = R$ (i.e., $U = 0$)である。

例えば，Aの resolution のグラフ Γ が (1.4) で与えられているとき，もしAが Gorenstein ならば

$$G(A) = R = k[x, y, z]\big/(x^2+y^3+z^{31})$$

となり，Aは degree 2 の hypersurface である事がわかる。（系(3.10)及び，それに続く記述も参照）

また，任意の自然数 β ($\geqq 1$) について $a(\Gamma)=\beta$, $p_a(\Gamma)=1$ となる graph Γ が存在するので，定理 (3.2) は命題(2.4)とは別の系列の特異点について述べていることになる。なお，$p_a(\Gamma)=1$ を満す特異点は Ph. Wagreich によって楕円型特異点と呼ばれている（弱楕円型特異点と呼ばれる事もある [21]）[16]。

定理(3.2)の証明には，次の3つの準備が必要である。

Duality (2.3.1)

$R = \bigoplus_{\ell \geq 0} H^0(\mathcal{O}_E(\ell \cdot D))$ の構造の解析 (3.1),(3.3)(3.4)

cohomology群についての簡単な操作 (3.5),(3.6),(3.7)

(3.3) $R_\eta = H^0(E, \mathcal{O}_E(\eta D)) \neq 0$ となるような正の整数 η と R_η に属する non-zero元 x を任意にとる。標準的な sheaf の inclusion

$x \cdot \mathcal{O}_E(\ell \cdot D) \hookrightarrow \mathcal{O}_E((\ell+\eta)D)$ により可換図式：

$$\begin{tikzcd}
H^1(E, x\cdot\mathcal{O}_E(\ell D)) \arrow[r] & H^1(E, \mathcal{O}_E((\ell+\eta)D)) \arrow[r] & 0 \\
x \otimes H^1(E, \mathcal{O}_E(\ell D)) \arrow[u] \arrow[ur, "x\text{との積}"'] & &
\end{tikzcd}$$

を，任意の整数ℓについて得る。特に，元xの積による

(3.3.1) $x : H^1(E, \mathcal{O}_E(\ell\cdot D)) \longrightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E((\ell+\eta)D))$

は常に上射になるわけである。

(3.4) $P_a(\Gamma)=1$を仮定する。すると $\bigoplus_{\ell\geqq 0} H^1(E,\mathcal{O}_E(\ell D))\neq 0$ である[1][2][16]。また中山の補題により，$\bigoplus_{\ell\geqq 0}H^1(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D))/\mathfrak{m}_R\bigoplus_{\ell\geqq 0}H^1(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D)) = \bigoplus_{\ell=0}^{\varepsilon-1}H^1(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D))$ [15] は non-zero となり，(3.1)により，$\bigoplus_{\ell=0}^{\varepsilon-1} H^1(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D))\cong k$ である事がわかる。$H^1(\mathcal{O}_E(\gamma\cdot D))\cong k$ となる整数γが$\{0,1,\dots,\varepsilon-1\}$の中にある。$R_\varepsilon$に属するnon-zero元$x$の積写像

$$x^\alpha : H^1(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_E((\ell+\alpha\cdot\varepsilon)D)), \quad \alpha\geqq 1$$

は上射(3.3.1)だから，次の関係を得る：

(3.4.1)
$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D)) = 0 \quad \text{if} \quad \ell\not\equiv\gamma \mod \varepsilon,\ \ell\geqq 0.$$
$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D)) \leqq 1 \quad \text{if} \quad \ell\equiv\gamma \mod \varepsilon,\ \ell\geqq 0.$$

特に $a(R(E,D)) = \max\{\alpha\in\mathbb{Z} \mid H^1(\mathcal{O}_E(\alpha D))\neq 0\}$ は，$a(R)\equiv\gamma \mod \varepsilon$ であり，$H^1(\mathcal{O}_E(a(R)D))\cong k$ となる。非負の整数vをとって $a(R)=\gamma+v\varepsilon$ と書こう。任意の整数u, $0\leqq u\leqq v$ について次の可換図式ができる：

$$\begin{tikzcd}
k \cong H^1(\mathcal{O}_E(\gamma D)) \arrow[rr, "x^{v}\text{との積}"] \arrow[dr, "x^{u}\text{との積}"'] & & H^1(\mathcal{O}_E(a(R)\cdot D)) \cong k \\
& H^1(\mathcal{O}_E((\gamma+u\cdot\varepsilon)D)) \arrow[ur, "x^{v-u}\text{との積}"'] &
\end{tikzcd}$$

(3.3.1)より，これらはすべて同型写像となり，

(3.4.2) $\quad H^1(\mathcal{O}_E((\gamma+u\cdot\varepsilon)D)) \cong k$ for u s.t. $0 \leqq u \leqq v$.

である。また、以上で、$p_a(\Gamma)=1$ の時

(3.4.3) $\quad p_g(R(E.D)) = v+1 = \dfrac{a(R(E.D))-\gamma}{\varepsilon} + 1$

である事もわかった。

(3.5) 定理(2.3)の条件(2)と$\sqcup$の消滅を見くらべると;…。特異点Aの Gorenstein 性から $G(A)=\bigoplus_{\ell\geqq 0} F^{\ell}/F^{\ell+1}$ の normality を考察しようとするならば、(または、$G(A)$ の non-normality から A の non-Gorenstein 性を考察しようとするならば)、ある1箇所の gap $\sqcup_\ell = \mathrm{Ker}\{R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(\ell+1)E)) \longrightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-\ell E))\}$ から、なるべく $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-a(R)\cdot E))$ へ"近い場所"に $R^1\phi_*\mathcal{O}_X$ への non-trivial kernel を構成する方法を見出さなければならない。

non-zero元 $\Phi \in \sqcup_\ell$ があったとして、まず次のようにして $R_\ell = H^0(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D))$ に属する non-zero元 y をひとつとる:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{O}_E(\ell\cdot D)) & \xrightarrow{\delta} & R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(\ell+1)E)) & \longrightarrow & R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-\ell\cdot E)) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ y & \longmapsto & \delta(y)=\Phi & \longmapsto & 0 \end{array}.$$

<u>補題</u> (3.6) $\quad\Phi$ に対して、自然数 p s.t. $\ell+1 \leqq p \leqq a(R)$ と $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-pE))$ に属する元 Φ_p があって、対応

$$\eta : R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-pE)) \longrightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(\ell+1)E))$$

$$\xi_p : R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-pE)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_E(pE))$$

によって， $\eta(\Phi_p)=\Phi$ かつ $\xi_p(\Phi_p)\neq 0$ となる。

自明であろうから，証明は省略する。

更に

<u>補題</u> (3.7). 上の状況で，自然数 t をひとつ固定する。

<u>仮定</u> $t\cdot y^{t-1}\xi_p(\Phi_p)\in H^1(\mathcal{O}_E(((t-1)l+p)\cdot D))$ は non-zero.

<u>結論</u> $R^1\varphi_*(\mathcal{O}_X(-(t-1)lE-pE))$ に属する non-zero 元 Φ^t が存在して，対応 $\omega: R^1\varphi_*(\mathcal{O}_X(-(t-1)lE-pE))\longrightarrow R^1\varphi_*(\mathcal{O}_X(-l\cdot tE))$ により，$\omega(\Phi^t)=0$ となる。

<u>(3.7) の証明</u> Čech-cohomology の記法で，具体的に Φ^t を構成する。coherent sheaves についての X の Leray cover $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ をひとつとり，$y=\{y_i\}\in \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_E(lD))$ などと，あらわす。

zero-cochain $\tilde{y}=\{\tilde{y}_i\}\in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-lE))$ を，完全列

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(U_i, \mathcal{O}_X(-lE)) & \longrightarrow & H^0(U_i, \mathcal{O}_E(lD)) & \longrightarrow & H^1(U_i, \quad)=0 \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\tilde{y}_i & \longmapsto & y_i & \longmapsto & 0
\end{array}$$

で求めて，$\delta\tilde{y}=\{\tilde{y}_j-\tilde{y}_i\}=\Phi$ in $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-(l+1)E))$ という対応があるが，$\eta(\Phi_p)=\Phi$ (3.6) となっている事から，$\tilde{y}=\{\tilde{y}_i\}$ として，

(3.7.1) $\tilde{y}_j-\tilde{y}_i\in H^0(U_i\cap U_j, \mathcal{O}_X(-pE))\quad \forall i,j\in I$

となるように $\tilde{y}$ をとり直す事ができる。

さて，zero-cochain $\tilde{y}^t\in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-t\,lE))$ を

$\tilde{y}^t = \{\tilde{y}_i^t\}$ により定める。そして one-cocycle $\{\tilde{y}_j^t - \tilde{y}_i^t\} \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$ に注目しよう。

$$\begin{aligned}\tilde{y}_j^t - \tilde{y}_i^t &= \{(\tilde{y}_j - \tilde{y}_i) + \tilde{y}_i\}^t - \tilde{y}_i^t \\ &= \sum_{s=1}^{t} \binom{t}{s} \tilde{y}_i^{t-s} \cdot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^s \quad \text{on } U_i \cap U_j\end{aligned}$$

そして，$\tilde{y}_i^{t-s} \cdot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^s \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-(t-s)\ell E - spE))$ である (3.7.1)。更に $\ell < p$ であるから，次の関係が成立する：

(3.7.2) $\tilde{y}_i^{t-1} \cdot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i) \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-(t-1)\ell E - pE))$

$\tilde{y}_i^{t-s} \cdot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^s \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-(t-1)\ell E - pE - E))$

for $s = 2, 3, \cdots, t$.

かくして，$\{\tilde{y}_j^t - \tilde{y}_i^t\} \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(-(t-1)\ell E - pE))$ と見なせる。これによって定まる $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(-(t-1)\ell E - pE)) \cong R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(t-1)\ell E - pE))$ の元を Φ^t と書く。定め方により $\omega(\Phi^t) = 0$ は明らかである。また (3.7.2) により，$\xi_{(t-1)\ell+p}(\Phi^t) = \{t \cdot \tilde{y}_i^{t-1}(\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)\} = t \cdot y^{t-1} \xi_p(\Phi_p)$，where $\xi_{(t-1)\ell+p} : R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-(t-1)\ell E - pE)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_E(((t-1)\ell+p)D))$，であり，これは仮定より zero でない。

Q.E.D.

(3.8). <u>定理 (3.2) の証明</u>　$U_\ell = 0$ ($\ell \geqq 0$) を ℓ についての帰納法で証明する。まず $U_0 = 0$ である事は系 (1.13) の証明で述べた。$U_\ell = 0$ for $\ell \leqq d_0 - 1$ (d_0 は 1 以上のある整数) が証明されたと仮定する。この仮定は，明らかに，条件

(3.8.1) $R^1\psi_*(\mathcal{O}_X(-\ell E)) \longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_X$ is injective for $\ell \leqq d_0$

と同値である。更に duality (2.3.1) により，条件

(3.8.2) $\quad R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(a(R)+1-\ell)E)) \longrightarrow R^1\phi_*\mathcal{O}_X$ is injective for $\ell \leqq d_0$.

とも同値である。これより，特に次の完全列が従う：

(3.8.3)
$$0 \longrightarrow R^1\phi_*(-(a(R)+1-d_0)E)) \to R^1\phi_*(-(a(R)-d_0)E)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_E((a(R)-d_0)D)) \longrightarrow 0.$$

<u>Case 1</u> <u>$H^1(\mathcal{O}_E((a(R)-d_0)D))=0$ の時</u> (3.8.2) および (3.8.3) より，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(a(R)-d_0))E)) \longrightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X)$ は単射である。duality (2.3.1) より $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(d_0+1)E)) \longrightarrow R^1\phi_*\mathcal{O}_X$ も単射となり $\sqcup_{d_0}=0$ が従う。

<u>Case 2</u> <u>$H^1(\mathcal{O}_E((a(R)-d_0)D))\neq 0$ の時</u> $\sqcup_{d_0}\neq 0$ を更に仮定して矛盾を導こう。まず (3.4) より，$a(R)-d_0 \equiv \gamma$ mod ε かつ $a(R)\equiv\gamma$ mod ε だから

(3.8.4) $\quad d_0 \equiv 0 \mod \varepsilon$

である。non-zero 元 $\Phi \in \sqcup_{d_0}$ について，完全列

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{O}_E(d_0D)) & \longrightarrow & R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(d_0+1)E)) & \longrightarrow & R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-d_0E)) \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ \psi & \longmapsto & \Phi & \longmapsto & 0 \end{array}$$

で，non-zero 元 $\psi \in R_{d_0}=H^0(\mathcal{O}_E(d_0D))$ を定める。補題 (3.6) で存在が保証された Φ に対する自然数 p を調べよう。

$H^1(\mathcal{O}_E(pD))\neq 0$ という条件 (3.6) と (3.4) より

(3.8.5) $\quad p \equiv \gamma \mod \varepsilon$

である。今，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-pE)) \longrightarrow R^1\phi_*\mathcal{O}_X$ は単射でないと仮定しているから，帰納法の仮定 (3.8.2) より，$p \leqq a(R) - d_0$ である。ゆえに，自然数 t を選んで $a(R) - d_0 < p + td_0 \leqq a(R)$ とする事ができる。また (3.8.4).(3.8.5) より $p + td_0 \equiv \gamma \mod \varepsilon$ でもあるから，$H^1(\mathcal{O}_E((p+td_0)D)) \cong k$ となる (3.4)。ゆえに surjection (3.3.1)

$$y^t : k \cong H^1(\mathcal{O}_E(pD)) \xrightarrow{\times y^t} H^1(\mathcal{O}_E((p+td_0)D)) \cong k$$

は同型写像である。これで，$H^1(\mathcal{O}_E((p+td_0)D))$ の元 $(t+1)y^t\xi_p(\Phi_p)$ は non-zero である事がわかった。補題(3.7) により，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(p+td_0)E)) \longrightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(t+1)d_0E))$ は non-trivial Kernel を持ち，$R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-(p+td_0)E)) \longrightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X)$ は単射ではない。しかし，これは帰納法の仮定 (3.8.2) に反する。

Q.E.D.

以下，楕円型特異点の一般的な知識を仮定して，説明抜きで，結果を述べる（[9], [14], [21] など参照）。

<u>定理</u> (3.9)　$R = R(E, D)$ が $p_a(\Gamma) = 1$ なる graph Γ を持ち，$\psi : \tilde{X} \longrightarrow W = \mathrm{Spec}(R)$ を minimal good resolution，そして $\tilde{X}$ 上の effective divisor の集合 $\{ Z_{B_i} ; i = 1, \cdots, l \}$ を $\tilde{X}$ 上の elliptic sequence とする。ここで，Γ の central curve E が $\mathbb{P}^1$ と同型であると仮定する。すると

(i) $p_g(\mathrm{Spec}(R(E.D)))$ = the length of the elliptic sequence である。

(ii) 上記 graph を持つ特異点は、Laufer の意味で"generic"(Ch. IV [9] 参照) には、$\dim \sqcup = p_g(\mathrm{Spec}(R(E.D))) - 1$ である。それらは、$p_g(\mathrm{Spec}(R(E.D))) \geq 2$ の時、"generic" には、non-Gorenstein 特異点となる(定理(3.2)より、また Theorem(4.3) [9] 参照)。

系(3.10) 定理(3.9) の仮定の下で(i.e., $E \supseteq D'$ で)、

(i) $R(E.D)$ が Gorenstein になる事と、graph Γ が numerical Gorenstein になる事は同値である。そして、その時、$R(E.D)$ は maximally elliptic singularity である。

(ii) graph Γ を resolution に持つ特異点 A が、Gorenstein になる事と、maximally elliptic singularity である事は同値である。

例えば、上の状況では、A が Gorenstein ならば、A の重複度 $= \max\{2, -Z_0^2\}$ (ただし Z_0 は Γ の fundamental cycle) となる事が [14] の結果とあわせて示される(定理(3.2)の直後の例参照)。

注意(3.11) 上記 (3.9)(*) 及び (2.2) のように"analytic"に構成した local ring は、Artin の定理 (Publ. IHES 36. Theorem(3.8)) により analytic に同型な(従って同じ不変量をもつ) essentially

(*) blowing-down によって構成するという意が、"generic" にはある、see Laufer[9]) of finite type の A に置き換えて, 我々のわく組みで議論している。

§ おしまいに,

実際の講演では, 渡辺は filtered ring の一般論の後に定理1, 定理2を述べ, 泊は $U\neq 0$ となる初等的例(2.2)を詳述した後 Gorenstein 性に触れた。講演時の feeling を再現する為に, [19] [20]を参考文献と挙げておきます。

References.

[1] M. Artin, Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math. 84 (1962), 485-496.

[2] ________, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1966), 129-136.

[3] M. Demazure, Anneaux gradues normaux, preprint, Ecole Polytechnique, (1978).

[4] H. Flenner, Rationale quasi-homogene Singularitaten, Arch. Math. 36 (1981), 35-44.

[5] J. Giraud, Improvement of Grauert-Riemenschneider's Theorem for a normal surface, Ann. Inst. Fourier, 32 (1982), 13-23.

[6] S. Goto, K.-i. Watanabe, On graded rings, I. J. Math. Soc. Japan, 30

(1978), 179-213.

[7] A. Grothendieck, J. Dieudonne, Elements de Geometrie Algebrique, II, III, Publ. I.H.E.S., 8, 11.

[8] F. Hidaka, A projective contractability criteria and its applicatios, in preparation.

[9] H.B. Laufer, On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99 (1977), 1257-1295.

[10] J. Lipman, Desingularization of two-dimensional schemes, Ann. of Math. 107 (1978), 151-207.

[11] P. Orlik, Ph. Wagreich, Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$-action, Ann. of Math. 93 (1970), 205-228.

[12] H. Pinkham, Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action, Math. Ann. 227 (1977), 183-193.

[13] F. Sakai, Weil divisors on normal surfaces, Duke Math. J. 51 (1984), 877-887.

[14] M. Tomari, A p_g-formula and elliptic singularities, Publ. R.I.M.S., 21 (1985), 297-354.

[15] ________ , Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\psi_*O_{\tilde{V}}$ for normal two-dilensional singularities, to appear in Adv. Studies in Pure Math. 8 (1986), Proc. Japan-U.S. seminor 1984, Tsukuba-Kyoto.

[16] Ph. Wagreich, Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math., 92 (1970), 419-454.

[17] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.

[18] ________, Normal filtration について, 才7回可換環論シンポジウム (1985) 報告集. 205 — 214.

[19] ________, Filtered Rings と Filtered Blowing-up について 才3回可換環論シンポジウム (1981) 報告集 37-48、

[20] M. Tomari, 2次元次数環 $\bigoplus_{n\geq 0} \overline{Q^n}/\overline{Q^{n+1}}$ の Cohen-Macaulay 性について (M. Morales その他の方々の仕事による) 才6回可換環論シンポジウム (1984) 報告集 317 — 327 (補遺が、才7回報告集 p137 にある)。

[21] Stephen. S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 257 (1980) 269 — 329.